



تست ۱

①

انتگرال مورد نظر یک انتگرال خطی نوع دوم روی یک منحنی بسته که از دو دایره در دو ربع اول و دوم تشکیل شده است.

منحنی در دو ربع $z + z^2 = 2$ است که در $z = -2$ و $z = 1$ اتفاق می افتد البته چون جهت حرکت را مشخص می کنیم.

$z = x^2 + y^2$ به این جهت که $z = -2$ قابل قبول نیست. لذا اعم مورد نظر از دایره دوم در $z = 1$ حاصل می شود که $x^2 + y^2 = 1$ است.

$\vec{F} = (y, z, x) \Rightarrow \vec{F}(c(t)) = (\sin t, 2, \cos t)$

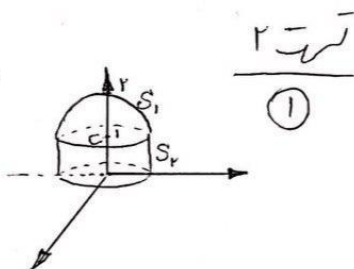
$C: x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{\text{در ربع اول و دوم}} \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, 2, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt$

$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 2\cos t) dt = -\pi$

به توجه به اینکه هر بخش به دو مورد تقسیم می شود، مدارها به دو ناحیه اول و دوم تقسیم می شود.

چون $\text{curl } \vec{F} = \vec{0}$ است.

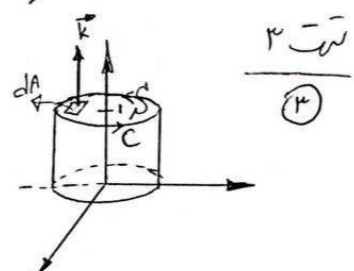


چون منحنی بسته است، کار به دو صورت اول و دوم تقسیم می شود.

صورت اول قضیه استوکس می باشد که می بینیم.

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} ds$

دری که $ds = dA$ ، $\vec{n} = \vec{k}$ است.



$\Rightarrow I = \iint_S (q_x - p_y) \cdot (0, 0, 1) dA = 2S_D = 2(4\pi) = 8\pi$

↑ بردار $\vec{k}$ و در جهت $\vec{k}$ قرار می گیرد.

تست ۴
 استرال مورد تویک استرال سطح نوع دوم است (تایم تحت استرال یک میله برداری است).
 (۲) توکم به لبه بودن سطح خاص از قفیه دیوژرانس، داریم:

$$I = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\text{داخل استوانه}} \text{Div}(\vec{F}) dV = \iiint_{y^2+z^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 2} (y^2 + z^2) dV$$

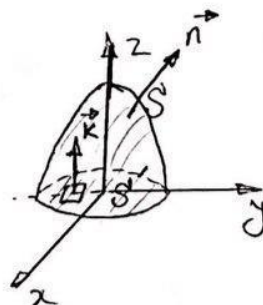
$$\Rightarrow I = 3 \iiint_{y^2+z^2 \leq 1} (y^2+z^2) dx dA = 9 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta$$

$$\Rightarrow I = 9 (2\pi) \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{9\pi}{2}$$

تست ۵
 (۴) با توجه به هدرت دوم قفیه استوکس، به جای می سبب ت جرجش روی S ، به یک سطح ساده تری، ابرای می سبب استرال مورد تویک انتخاب کنیم. سطح S' در این سوال، روی صفحه $z=0$ به جری ساده است که رال $ds=dA$ ، $\vec{n}=\vec{k}$ است.

$$\text{صورت دوم استوکس: } \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S'} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

$$\Rightarrow I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (q_2 - p_1) \cdot (0, 0, 1) dA$$



$$\Rightarrow I = 3 S_D = 3\pi$$